E.N.S.I. PHYSIQUE-MECANIQUE Option P 1981

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur K, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

I

Dans cette partie, E_1 et E_2 désignent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

1° Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E et un seul tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in E_1, & f(x) = x ; \\ \forall x \in E_2, & f(x) = -x . \end{cases}$$

On dira que f est *associé* au couple (E_1, E_2) de sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Quel est l'endomorphisme $f \circ f$?

Quel est l'endomorphisme f dans le cas où $E_1 = \{0\}$; dans le cas où $E_2 = \{0\}$?

2° Quelles sont les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres?

3° Désignant par n la dimension de E, soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E dont les p premiers éléments $(0 \leqslant p \leqslant n)$ constituent une base de E_1 et les $(n - p)$ derniers une base de E_2. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f relativement à cette base?

Application. On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$, où E_1 est engendré par les vecteurs (3, 1, 1) et (3, 2, 1) et E_2 par le vecteur (2, 1, 1). Vérifier que E_1 et E_2 sont bien supplémentaires et déterminer la matrice de l'endomorphisme f associé à (E_1, E_2) relativement à la base $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

II

Dans toute cette partie, f désigne un endomorphisme *involutif* de E, c'est-à-dire tel que $f \circ f$ soit l'application identique de E. On pose :

$$E_f^+ = \{x ; f(x) = x\} \quad \text{et} \quad E_f^- = \{x ; f(x) = -x\}$$

1° Montrer que E_f^+ et E_f^- sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et que f est associé au couple (E_f^+, E_f^-), au sens où on l'a entendu dans la partie I.

2° Soit g un endomorphisme de E. Montrer que g commute avec f $(f \circ g = g \circ f)$ si et seulement si g laisse stables E_f^+ et E_f^-, c'est-à-dire réalise : $g(E_f^+) \subset E_f^+$ et $g(E_f^-) \subset E_f^-$.

Ces conditions étant supposées vérifiées, on considère l'application g_1 de E_f^+ dans lui-même et l'application g_2 de E_f^- dans lui-même définies par :

$$(1) \qquad \begin{cases} \forall x \in E_f^+, & g_1(x) = g(x) \\ \forall x \in E_f^-, & g_2(x) = g(x) \end{cases}$$

Vérifier que g_1 et g_2 sont des endomorphismes.

Réciproquement, étant donné deux endomorphismes g_1 et g_2 de E_f^+ et de E_f^- respectivement, montrer qu'il existe un endomorphisme g de E et un seul qui vérifie (1); montrer qu'il commute avec f.

Application. Dans le cas où $\dim E_f^+ = \dim E_f^- = 1$ (donc $\dim E = 2$), quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec f ?

On pourra, par exemple, écrire leur matrice dans une base convenable.

.../...

3° Soit g un endomorphisme de E qui commute avec *tous* les endomorphismes involutifs de E. Montrer que g est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un élément λ de K tel que :

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \lambda x$$

On pourra commencer par montrer que tout élément non nul de E est vecteur propre de g.

4° Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f. Montrer que g est lui-même involutif si et seulement si les endomorphismes g_1 et g_2 définis à la question 2 ci-dessus le sont.

Application. Dans le cas où $\dim E_f^+ = \dim E_f^- = 1$, quels sont les endomorphismes involutifs de E qui commutent avec f ?

III

Dans toute cette partie, f et g désignent deux endomorphismes *involutifs* donnés de E qui *commutent*.

On pose :

$$E_1 = (E_f^+)_{g_1}^+, \qquad E_2 = (E_f^+)_{g_1}^-, \qquad E_3 = (E_f^-)_{g_2}^+ \quad \text{et} \quad E_4 = (E_f^-)_{g_2}^-,$$

où g_1 et g_2 désignent les endomorphismes définis à la question 2 de la partie II.

1° Montrer que tout élément x de E s'écrit, de façon unique, sous la forme : $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, où $x_i \in E_i$, pour tout élément i de $\{1, 2, 3, 4\}$.

Montrer que $E_g^+ = E_1 \oplus E_3$ et que $E_1 = E_f^+ \cap E_g^+$; écrire, sans donner de démonstration, tout élément de $\{E_f^+, E_f^-, E_g^+, E_g^-\}$ sous la forme d'une somme directe de deux éléments de $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ et tout élément de $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ sous la forme d'une intersection de deux éléments de $\{E_f^+, E_f^-, E_g^+, E_g^-\}$.

2° Montrer qu'un endomorphisme h de E commute avec f et g si et seulement s'il laisse stables les sous-espaces vectoriels E_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$).

Soit A l'ensemble des endomorphismes *involutifs* de E qui commutent avec f et g. Définir avec précision les éléments de A.

Application. On se place dans le cas où $\dim E_i = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que A est fini et déterminer le nombre de ses éléments.

3° On considère un endomorphisme l de E qui commute avec tous les éléments de A.

Après avoir remarqué que l commute avec f et g, montrer qu'il existe des éléments λ_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) de K tels que :

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \forall x \in E_i, \quad l(x) = \lambda_i x \tag{2}$$

Les nombres λ_i sont-ils uniques?

Réciproquement, étant donné quatre éléments λ_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) de K, montrer qu'il existe un endomorphisme l de E et un seul qui vérifie (2); montrer qu'il commute avec tous les éléments de A.

4° On désigne par B l'ensemble des endomorphismes *involutifs* de E qui commutent avec tous les éléments de A.

Définir avec précision les éléments de B; montrer que B est fini et exprimer le nombre de ses éléments en fonction du nombre de sous-espaces vectoriels E_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) différents de $\{0\}$.

XXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail